

Fehler beim Testen von Binomialverteilungen

Einleitung:

Beim Testen von Binomialverteilungen haben wir uns zwischen zwei alternativen Hypothesen (H_0, H_1) entschieden oder, mit anderen Worten, die Nullhypothese (H_0) akzeptiert oder verworfen. Das Verwerfen der Hypothese bedeutet jedoch nicht, dass die Hypothese falsch ist, sie ist nur sehr zweifelhaft. Die Wahrscheinlichkeit, die Hypothese zu verwerfen, obwohl sie zutrifft, kennen wir bereits unter dem Begriff der Irrtumswahrscheinlichkeit. Die maximale Irrtumswahrscheinlichkeit nennt man das Signifikanzniveau.

Beispiel:

Tino besitzt gefälschte Münzen, bei welchen die Wahrscheinlichkeit p für Kopf auf 20% reduziert ist. Ihm ist entfallen, ob die Münze in seiner Hosentasche fair oder gefälscht ist. Zur Überprüfung wird die Nullhypothese $H_0: p(\text{Kopf}) = 0,5$ (faire Münze) mit einem Stichprobenumfang von $n=12$ und auf dem Signifikanzniveau 5% linksseitig getestet.

$H_0: p = 0,5$ (Die Münze ist fair)

$H_1: p = 0,2$ (Die Münze ist gefälscht)

X : Anzahl der Kopfwürfe bei 12 Probewürfen

$n = 12$

$A = [a; 12] = [3; 12]$

(Zur Erinnerung: Man sucht die kleinste Zahl a heraus, sodass $P(X \leq a) > 0,05$)

$\bar{A} = [0; 2]$

Die Irrtumswahrscheinlichkeit (Wahrscheinlichkeit des Ablehnungsbereichs) lässt sich wie folgt errechnen:

$$P(X \leq 2) = F_{12,0,5}(2) \approx 0,0193 = 1,93\%$$

Es handelt sich hier also um die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine faire Münze als gefälscht eingestuft wird.

Diese beträgt 1,93 %.

Wenn die Nullhypothese H_0 verworfen wird, obwohl sie richtig ist, spricht man übrigens vom **Fehler 1. Art**. Dieser Fehler wird oft auch α -Fehler genannt. Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art ist eben genau die Irrtumswahrscheinlichkeit (hier: max. 5%).

Vom **Fehler 2. Art** (β -Fehler) spricht man, wenn die Nullhypothese akzeptiert wird, obwohl sie falsch ist. Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art hängt von der wirklichen Wahrscheinlichkeit p (hier: $H_1: p = 0,2$) ab.

Weiter im Beispiel:

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art, also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine gefälschte Münze als fair eingestuft wird, lässt sich wie folgt berechnen:

$$P(X_{0,2} > 2) = 1 - F_{12;0,2}(2) \approx 1 - 0,5583 = 0,4417$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also 44,17%

Wir fassen zusammen:

	H_0 ist wahr	H_0 ist falsch / H_1 ist wahr
H_0 wird akzeptiert	<i>richtige Entscheidung</i>	Fehler 2. Art
H_0 wird verworfen	Fehler 1. Art	<i>richtige Entscheidung</i>

- Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art ist dasselbe wie die Irrtumswahrscheinlichkeit.
- Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art hängt von der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit p ab.

